КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2021 Т. № С. 1–15

Ки&М

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

УДК: 519.8

Поиск равновесий в двухстадийных моделях распределения транспортных потоков по сети.

Е. В. Котлярова[1,a], А. В. Гасников [1, 2, 3,b], Е. В. Гасникова[1,c], Д. В. Ярмошик[1,d]

[1]Национальный исследовательский университет «Московский физико-технический институт»,
Россия, 141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9
[2]Институт проблем передачи информации РАН,
Россия, 127051, г. Москва, Б. Каретный пер., д. 9
[3]Кавказский математический центр,
Россия, 385000, г. Майкоп, адрес Первомайская ул., 208

E-mail: [a] kotlyarova.ev@phystech.edu, [b] gasnikov@yandex.ru, [c] egasnikov@yandex.ru,
[d] yarmoshik.dv@phystech.edu

Получено 08.12.2020.
Принято к публикации 20.12.2020.

В работе описывается двухстадийная модель равновесного распределения транспортных потоков. Модель состоит из двух блоков. Первый блок – модель расчёта матрицы корреспонденций, второй блок – модель равновесного распределения транспортных потоков по путям. Первая модель, используя матрицу транспортных затрат (затраты на перемещение из одного района в другой район), рассчитывает матрицу корреспонденций, описывающих потребности в объемах передвижениях из одного района в в другой район. Вторая модель описывает на базе равновесного принципа Нэша–Вардропа (каждый водитель выбирает кратчайший для себя путь), как именно потребности в перемещениях, задаваемые матрицей корреспонденций, распределятся по возможным путям. Зная способы распределения потоков по путям, можно рассчитать матрицу затрат. Равновесием в двухстадийной модели транспортных потоков называют неподвижную точку цепочки из этих двух моделей. В статье предложен способ сведения задачи поиска описанного равновесия к задаче выпуклой негладкой оптимизации. Предложен численный способ решения полученной задачи оптимизации. Проведены численные эксперименты для небольших городов США и для Владивостока.

Ключевые слова: модель расчета матрицы корреспонденций, многостадийная модель, модель равновесного распределения потоков по путям

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2021 VOL. NO. P. 1–15

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

UDC: 519.8

Finding equilibrium in two-stage traffic assignment model.

E. V. Kotliarova[1,a], A. V. Gasnikov[1, 2, 3,b], E. V. Gasnikova[1,c],
D. V. Yarmoshik[1,d]

[1]National Research University Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institute lane, Dolgoprudny, 141701, Russia
[1]Institute for Information Transmission Problems RAS,
9 B. Karetny lane, Moscow, 127051, Russia
[1]Caucasus Mathematical Center,
208 Pervomaiskaia street, Maikop, 385000, Russia

E-mail: [a] kotlyarova.ev@phystech.edu, [b] gasnikov@yandex.ru, [c] egasnikov@yandex.ru,
[d] yarmoshik.dv@phystech.edu

Received 08.12.2020.
Accepted for publication 20.12.2020.

Authors describe a two-stage traffic assignment model. It contains of two blocks. The first block consists of model for calculating correspondence (demand) matrix, whereas the second block is a traffic assignment model. The first model calculates a matrix of correspondences using a matrix of transport costs. It characterizes the required volumes of movement from one area to another. The second model describes how exactly the needs for displacement, specified by the correspondence matrix, are distributed along the possible paths. It works on the basis of the Nash–Wardrop equilibrium (each driver chooses the shortest path). Knowing the ways of distribute flows along the paths, it is possible to calculate the cost matrix. Equilibrium in a two-stage model is a fixed point in the sequence of these two models. The article proposes a method of reducing the problem of finding the equilibrium to the problem of the convex non-smooth optimization. Also a numerical method for solving the obtained optimization problem is proposed. Numerical experiments were carried out for the small towns of USA and for Vladivostok.

Keywords: correspondence matrix calculation model, multi stage model, equilibrium distribution model of traffic flow

Citation: Computer Research and Modeling, 2021, vol. , no. , pp. 1–15 (Russian).

Введение

В данной статье описывается (с обоснованием) вариационный (экстремальный) принцип, сводящий поиск равновесного распределения транспортных потоков по сети к задаче выпуклой оптимизации. Под распределением потоков понимается: 1) расчёт матрицы корреспонденций и 2) распределение потоков по путям при заданных корреспонденциях. Таким образом, речь идет о двухуровневой модели распределения. Многостадийные модели транспортных потоков являются одним из основных объектов изучения при долгосрочном транспортном планировании [Ortúzar, 2002; Гасников и др., 2013; Гасников–Гасникова, 2020]. С помощью таких моделей можно просчитывать долгосрочные последствия: введения в эксплутатацию различных инфраструктурных объектов, изменения дорожной сети и т.п.

Следуя работам [Гасников и др., 2014; Бабичева и др., 2015; Гасников, 2016] в статье выписывается задача выпуклой оптимизации, к которой сводится поиск равновесия в такой двухстадийной модели. Далее эта задача упрощается (путем перехода к двойственному представлению), и описывается численный способ решения возникающей в итоге (двойственной) задачи. Отличительными особенностями данной работы являются: 1) простой способ получения итоговой задачи оптимизации и способа ее решения; 2) проведенные численные эксперименты. За базу был взят код [Кубентаева, 2020], в котором рассматривалось только распределение потоков по путям при заданных корреспонденциях [Гасников–Кубентаева, 2018; Баймурзина и др., 2019; Kubentayeva–Gasnikov, 2020]. В качестве источника данных использовался ресурс [Stabler B. et al., 2020]. Также из разных источников были собраны данные по Владивостоку. Таким образом в данной статье код [Кубентаева, 2020] был распространен на поиск равновесий в двухстадийных моделях, введенных в [Гасников и др., 2014; Бабичева и др., 2015; Гасников, 2016].

Основные определения и обозначения

Для простоты будем рассматривать замкнутую транспортную систему, описываемую графом $G = \langle V, E\rangle$, где V – множество вершин ($|V| = n$), а E – множество ребер ($|E| = m$). Будем обозначать ребра графа через $e \in E$. Для стандартной транспортной системы можно ожидать, что $m \simeq 3n$. Для больших мегаполисов (таких как Москва) $n \simeq 10^5$. Однако в данной работе мы будем рассматривать в основном примеры $n \lesssim 10^4$. Транспортный граф G считается известным.

Часть вершин $O \subseteq V$ (origin) являются источниками корреспонденций, а часть стоками корреспонденций $D \subseteq V$ (destination). Если говорить более точно, то вводится множество пар (источник, сток) корреспонденций $OD \subseteq V \bigotimes V$. Сами корреспонденции будем обозначать через d_{ij}, где $(i, j) \in OD$. Как правило $|OD| \ll n^2$ [Гасников и др., 2014]. Не ограничивая общности, будем далее считать, что $\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij} = 1$. Множество пар OD считается известным. Корреспонденции – не известны! Однако известны (заданы) характеристики источников и стоков корреспонденций. То есть известны величины $\{l_i\}_{i\in O}$, $\{w_j\}_{j\in D}$

$$\sum_{j:(i,j)\in OD} d_{ij} = l_i, \qquad \sum_{i:(i,j)\in OD} d_{ij} = w_j. \tag{1}$$

Заметим, что $\sum_{i\in O} l_i = \sum_{j\in D} w_j = 1$. Условие (1) будем также для краткости записывать в виде $d \in (l, w)$.

Обозначим через $\tau_e(f_e)$ – функцию затрат (например, временных) на проезд по ребру (участку дороги) e, если поток автомобилей на этом участке f_e. Функции $\tau_e(f_e)$ считаются заданными, например, таким образом: [Гасников и др., 2013; Patriksson, 2015; Гасников–Гасникова, 2020]

$$\tau_e(f_e) = \bar{t}_e \left(1 + \kappa \left(\frac{f_e}{\bar{f}_e}\right)\right)^{\frac{1}{\mu}}, \tag{2}$$

где $\bar{t}_e$ – время прохождения ребра e, когда участок свободный (определяется разрешенной скоростью на данном участке), а $\bar{f}_e$ – пропускная способность ребра e (определяется полосностью: [пропускная способность] $\leq$ [число полос] * [2000 авт/час] и характерстиками перекрестков). Считается, что эти характеристики известны [Stabler B. et al., 2020]. Параметр $\mu = 0.25$ – BPR-функции [Patriksson, 2015], но допускается и $\mu \to 0+$ – модель стабильной динамики [Nesterov–de Palma 2003; Гасников и др., 2013; Гасников и др., 2014; Гасников–Дорн и др., 2016; Гасников, 2016; Gasnikov et al., 2018; Гасников–Гасникова, 2020]. Параметр $\kappa > 0$ также считается заданным.

Полезно также ввести t_e – (временные) затраты на прохождения ребра e. Согласно вышенаписанному $t_e = \tau_e(f_e)$. По этим затратам $t = \{t_e\}_{e \in E}$ можно определить затраты на перемещение из источника i в сток j по кратчайшему пути: $T_{ij}(t) = \min_{p \in P_{ij}} \sum_{e \in E} \delta_{ep} t_e$, где p – путь (без самопересечений – циклов) на графе (набор ребер), P_{ij} – множество всевозможных путей на графе, стартующих из источника i и заканчивающихся в стоке j, $\delta_{ep} = 1$, если ребро e принадлежит пути p и $\delta_{ep} = 1$ – иначе.

В ряде выкладок далее также будет полезен вектор $x = \{x_p\}_{p \in P}$ – вектор распределения потоков по путям, где $P = \bigcup_{(i,j) \in OD} P_{ij}$. Заметим, что $f_e = \sum_p \delta_{ep} x_p$ или в матричном виде $f = \Theta x$, где $\Theta = \|\delta_{ep}\|_{e \in E, p \in P}$.

Энтропийная модель расчёта матрицы корреспонденицй

Под энтропийной моделью расчета матрицы корреспонденций $d(T)$ понимается определенный способ вычисления набора корреспонденций $\{d_{ij}\}_{(i,j) \in OD}$ по известной матрице затрат $\{T_{ij}\}_{(i,j) \in OD}$. Этот способ заключается в решении задачи энтропийно-линейного программирования, которую можно понимать, как энтропийно-регуляризованную транспортную задачу[1]

$$\min_{d \in (l,w); d \geq 0} \sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} T_{ij} + \gamma \sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} \ln d_{ij}, \tag{3}$$

где параметр $\gamma > 0$ считается известным [Вильсон 1978; Гасников–Гасникова, 2010; Гасников и др., 2013; Гасников и др., 2016; Гасников, 2016; Гасников–Гасникова, 2020]. Относительно выбора этого парметра, см. [Гасников и др., 2014; Гасников–Гасникова, 2020; Иванова, 2020].

Модели равновесного распределения транспортных потоков по путям

Матрица корреспонденций $\{d_{ij}\}_{(i,j) \in OD}$ порождает (вообще говоря, неоднозначно) некий вектор распределения потоков по путям x. Неоднозначность заключается в том, что балансовые ограничения, которые возникают на $x \in X(d)$:

$$x \geq 0 : \quad \forall (i,j) \in OD \to \sum_{p \in P_{ij}} x_p = d_{ij},$$

[1] Вместо $d_{ij} \ln d_{ij}$ точнее было бы писать $d_{ij} \ln \left(d_{ij} / \left(\sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} \right) \right)$ [Гасников и др., 2014], но $\sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} = 1$, поэтому, возможно, упрощенная форма записи.

как правило, не определяют вектор x однозначно. Вектор x, в свою очередь, пораждает вектор потоков на ребрах, $f = \Theta x$, который, в свою очередь, порождает вектор (временных) затрат на ребрах $t(f) = \{\tau_e(f_e)\}_{e \in E}$. На основе последнего вектора уже можно рассчитать матрицу затрат на кратчайших путях $T(t) = \{T_{ij}(t)\}_{(i,j) \in OD}$. Собственно, модель равновесного распределения потоков это формализация принципа Нэша–Вардропа о том, что в равновесии каждый водитель выбирает для себя кратчайший путь [Гасников и др., 2013; Patriksson, 2015; Гасников–Гасникова, 2020]. Другими словами, если для заданной корреспонденции $(i,j) \in OD$ известно, что (условие комплиментарности)

$$x_{p'} > 0, \text{ где } p' \in P_{ij}, \text{ то } T_{ij}(t) = \min_{p \in P_{ij}} \sum_{e \in E} \delta_{ep} t_e = \sum_{e \in E} \delta_{ep'} t_e.$$

Задача поиска равновесия сводится, таким образом, к поиску такого вектора $x \in X(d)$, который бы порождал такие затраты $T := T(t(f(x)))$, что выполянется условие комплиментарности. В написанном выше виде искать равновесный вектор $x \in X(d)$ представляется сложной задачей, сводящейся к решению системы нелинейных уравнений. Однако, в данном случае (рассматривается потенциальная игра загрузки) можно свести поиск равновесия к решению задачи выпуклой оптимизации[1]

$$\min_{(f,x):\, f = \Theta x;\, x \in X(d)} \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} \tau_e(z) dz. \tag{4}$$

Решение задачи дает модель вычисления вектора потока на ребрах при заданной матрице корреспонденций $f(d)$ [Гасников и др., 2013; Гасников и др., 2014; Patriksson, 2015; Гасников–Дорн и др., 2016; Гасников–Гасникова, 2020].

Двухстадийная модель

Выше были описаны две модели. В первой (расчёт матрицы корреспонденций) на вход подается матрица затрат T, а на выходе получается матрица корреспонденций $d(T)$. Во второй модели наоборот, на вход подается матрица корреспонденций $d(T)$, а на выходе рассчитывается матрица затрат $T(d) = T(t(f(d)))$.

Под равновесием в двухстадийной транспортной модели понимается такая пара (f, d), что [Ortúzar, 2002; Гасников и др., 2014; Бабичева и др., 2015; Гасников, 2016; Гасников–Гасникова, 2020]

$$d = d(T(t(f))), \quad f = f(d), \tag{5}$$

то есть (f, d) – есть неподвижная точка описанных двух блоков моделей. Собственно, часто на практике так и ищут равновесие последовательно (друг за другом) прогоняя описанные два блока [Ortúzar, 2002; Гасников и др., 2014]. Однако, насколько нам известно, нет никаких теоретических гарантий, что такая процедура (последовательная прогонка) будет сходиться к неподвижной точке. Собственно, описанные в следующих разделах численные эксперименты показывают, что на практике сходимость наблюдается далеко не всегда. Но даже если наблюдается сходимость, то непонятно, насколько эта сходимость может быть быстрой, и лучший ли это способ (простая прогонка) численного решения (5)? Далее, следуя [Гасников и др., 2014; Гасников–Гасникова и др., 2015; Бабичева и др., 2015; Гасников, 2016; Гасников–Гасникова, 2020], предлагается эквивалентный способ перезаписи задачи (5) как задачи выпуклой оптимизации, которую можно уже решать оптимальными по скорости (глобально сходящимися) алгоритмам.

[1] Подобно (3) можно искать не равновесия Нэша–Вардропа, а стохастическое равновесия. Это приводит к дополнительному энтропийному слагаемому в (4) [Гасников и др., 2013; Гасников и др., 2014; Гасников и др., 2015; Баймурзина и др., 2019; Гасников–Гасникова, 2020].

Теорема 1. Задача поиска неподвижной точки (5) сводится к задаче выпуклой оптимизации

$$\min_{(f,x,d):f=\Theta x;x\in X(d);d\in(l,w);d\geq 0}\sum_{e\in E}\int_0^{f_e}\tau_e(z)dz+\gamma\sum_{(i,j)\in OD}d_{ij}\ln d_{ij}. \tag{6}$$

Схема доказательства. Вернёмся к формулировке задачи оптимизации (4) и заметим следующее важное свойство функционала задачи $\Psi(x)=\sum_{e\in E}\int_0^{f_e(x)}\tau_e(z)dz$: для всех $p\in P$

$$\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x_p}=T_p(x),$$

где $T_p(x)=\sum_{e\in E}\delta_{ep}\tau_e(f_e(x))$ – затраты на пути p. Это и есть проявление того, что рассматривается потенциальная игра загрузки. Собственно, для (3) также можно выделить потенциал $\Phi(d)=\sum_{(i,j)\in OD}d_{ij}T_{ij}$, для которого: для всех $(i,j)\in OD$

$$\frac{\partial\Phi(d)}{\partial d_{ij}}=T_{ij}.$$

Если бы удалось найти такую функцию $\tilde{\Phi}(d)$, для которой: для всех $(i,j)\in OD$

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}(d)}{\partial d_{ij}}=T_{ij}(t(f(d))), \tag{7}$$

где $T_{ij}(t(f(d)))$ определяется из решения задачи (4), то решение задачи

$$\min_{d\in(l,w);d\geq 0}\tilde{\Phi}(d)+\gamma\sum_{(i,j)\in OD}d_{ij}\ln d_{ij}$$

давало бы равновесную матрицу корреспонденций d, по которой можно было бы уже оценить и равновесный вектор потоков на ребрах $f=f(p)$, см. (5). Детали см. [Гасников и др., 2014; Гасников–Гасникова и др., 2015; Бабичева и др., 2015; Гасников, 2016; Гасников–Гасникова, 2020].

Таким образом, цель – найти потецниал $\tilde{\Phi}(d)$, если, конечно, он существует. Покажем, что

$$\tilde{\Phi}(d)=\min_{(f,x):f=\Theta x;x\in X(d)}\sum_{e\in E}\int_0^{f_e}\tau_e(z)dz,$$

см. формулу (4).

Для этого введем (выпуклые) функции $\sigma_e(f_e)=\int_0^{f_e}\tau_e(z)dz$, и обозначим сопряженные к ним функции через $\sigma_e^*(t_e)=\max_{f_e\geq 0}\{f_et_e-\sigma_e(f_e)\}$. Тогда (детали см. в [Гасников и др., 2014; Гасников, 2016; Гасников–Гасникова, 2020])

$$\tilde{\Phi}(d)=\min_{(f,x):f=\Theta x;x\in X(d)}\sum_{e\in E}\sigma_e(f_e)=\min_{(f,x):f=\Theta x;x\in X(d)}\sum_{e\in E}\max_{t_e\in\mathrm{dom}\,\sigma_e^*}\{f_et_e-\sigma_e^*(t_e)\}=$$

$$\max_{t_e\in\mathrm{dom}\,\sigma_e^*,e\in E}\left\{\min_{(f,x):f=\Theta x;x\in X(d)}\sum_{e\in E}f_et_e\right\}-\sum_{e\in E}\sigma_e^*(t_e)=$$

$$\max_{t_e\in\mathrm{dom}\,\sigma_e^*,e\in E}\sum_{(i,j)\in OD}d_{ij}T_{ij}(t)-\sum_{e\in E}\sigma_e^*(t_e). \tag{8}$$

Здесь dom σ_e^* означает область определения функции $\sigma_e^*(t_e)$. Из формулы (8) и формулы Демьянова–Данскина [Bertsekas, 2009; Гасников, 2021] следует (7).

Строго говоря, приведенные выше рассуждения еще не являются доказательством, поскольку апеллируют к понятию потенциала и использованию соответствующих теорем популяционной теории игр загрузки. Однако вместо того, чтобы приводить здесь эти соображения (подобно тому, как это было сделано, например, в работах [Sandholm, 2010; Гасников и др., 2013; Гасников и др., 2014; Гасников–Гасникова и др., 2015; Гасников и др., 2016; Dvurechensky et al., 2016; Гасников–Гасникова, 2020]), в этой статье мы ограничимся тем, что заметим, что выписанная задача (6), как задача оптимизации относительно d при «заморожоженных» (f, x), совпадает с задачей (3) и, наоборот, при «замороженном» d задача (6), как задача оптимизации относительно (f, x), совпадает с задачей (4). Таким образом, если удалось найти такую задачу, решение которой одновременно дает нужные нам связи переменных, описываемые формулой (5), то это и означает, что нам удалось свести поиск неподвижной точки сложного нелинейного отображения (которое не удается выписать аналитически) к явно выписанной задаче оптимизации (6). Ометим, что решение этой выпуклой задачи оптимизации по сложности сопоставимо с решением задачи (4), что будет пояснено в следующем разделе.

Переход к двойственной задаче

Как следует из схемы доказательства теоремы 1, задача выпуклой оптимизации (6) можно переписать эквивалентным седловым образом, введя двойственные переменные $t = \{t_e\}_{e \in E}$,[1] которые имеют естественную интерпретацию вектора потоков на ребрах,

$$\min_{d \in (l,w); d \geq 0} \max_{t_e \in \mathrm{dom}\ \sigma_e^*, e \in E} \left\{ \sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} T_{ij}(t) - \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e) + \gamma \sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} \ln d_{ij} \right\}.$$

Последнюю задачу удобнее переписать в виде[2]

$$\max_{t_e \in \mathrm{dom}\ \sigma_e^*, e \in E} \quad \min_{d \in (l,w); \sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} = 1; d \geq 0} \left\{ \sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} T_{ij}(t) + \gamma \sum_{(i,j) \in OD} d_{ij} \ln d_{ij} \right\} - \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e).$$

Вспомогательную задачу минимизации можно представить через двойственную к ней:

$$\max_{t_e \in \mathrm{dom}\ \sigma_e^*, e \in E; (\lambda, \mu)} -\gamma \ln \left(\sum_{(i,j) \in OD} \exp\left(\frac{-T_{ij}(t) + \lambda_i + \mu_j}{\gamma} \right) \right) + \langle l, \lambda \rangle + \langle w, \mu \rangle - \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e) =$$

$$- \min_{t_e \in \mathrm{dom}\ \sigma_e^*, e \in E; (\lambda, \mu)} \gamma \ln \left(\sum_{(i,j) \in OD} \exp\left(\frac{-T_{ij}(t) + \lambda_i + \mu_j}{\gamma} \right) \right) - \langle l, \lambda \rangle - \langle w, \mu \rangle + \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e). \quad (9)$$

[1] Отметим, что, как уже подмечалось ранее, есть явная связь двойственных переменных с прямыми: $t_e = \tau_e(f_e)$, $e \in E$. При $\mu \to 0+$ (см. (2)) эта связь становится более хитрой, см. [Гасников и др., 2014; Гасников–Дорн и др., 2016; Gasnikov et al., 2018; Баймурзина и др., 2019; Kubentayeva–Gasnikov, 2020; Гасников–Гасникова, 2020]. Это же замечание имеет место и для формулы (11) далее.

[2] Это седловая задача. Отметим, что известные сейчас оптимальные методы решения выпукло-вогнутых седловых задач (см., например, [Гасников, 2021; Гасников и др., 2021] и цитированную там литературу) здесь не подходят, поскольку не получается эффективно проектироваться на ограничение $d \in (l, w)$. Поэтому далее это ограничение заносится в функционал с помощью принципа множителей Лагранжа.

Обратим внимание, что добавленное по d ограничение $\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij} = 1$ тавтологично, поскольку следует из $d \in (l, w)$. Тем не менее, удобнее его добавить, чтобы при взятии min получалась равномерно гладкая функция (типа softmax), а не сумма экспонент, имеющая неограниченные константы гладкости [Гасников–Нестеров и др., 2015; Гасников–Гасникова, 2020]. Множители λ и μ являются двойственными множителями (множителями Лагранжа) к ограничениям $d \in (l, w)$ (см. (1)), которые заносятся в функционал (ограничения $\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij} = 1; d \geq 0$ не заносятся в функционал). Заметим, что если (t, λ, μ) – решение задачи (9), то[1] $\left(t, \lambda + (C_\lambda, ..., C_\lambda)^T, \mu + (C_\mu, ..., C_\mu)^T\right)$ – также будет решением задачи, т.е. решение задачи (9) не единственное [Гасников–Нестеров и др., 2015]. Заметим также, что зная (λ, μ), можно посчитать матрицу корреспонденций [Гасников–Нестеров и др., 2015; Гасников–Нестеров и др., 2016; Dvurechensky et al., 2020; Гасников–Гасникова, 2020]:

$$d_{ij}(\lambda, \mu) = \frac{\exp\left(\frac{-T_{ij}(t)+\lambda_i+\mu_j}{\gamma}\right)}{\sum_{(k,l)\in OD} \exp\left(\frac{-T_{kl}(t)+\lambda_k+\mu_l}{\gamma}\right)}. \tag{10}$$

Для решения задачи выпуклой оптимизации (но, вообще говоря, не гладкой, поскольку функции $T_{ij}(t)$ – негладкие) можно использовать субградиентные методы. А именно, субградиент (далее обозначаем (супер-)субградиент таким же символом, как и градиент ∇) целевого функционала по t (стоящего под минимумом) (9) можно посчитать по формуле Демьянова–Данскина [Bertsekas, 2009; Гасников, 2021]:

$$\sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}(\lambda, \mu)\nabla T_{ij}(t) + f = \sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}(\lambda, \mu)\nabla T_{ij}(t) + \left(\{\tau_e^{-1}(t_e)\}_{e\in E}\right)^T, \tag{11}$$

где τ_e^{-1} – обратная функция к τ_e. Примечательно, что отличие формулы (11) от ее аналога, который можно получить, решая задачу (4) посредством перехода к двойственной задаче [Гасников–Дорн и др., 2016; Гасников, 2016; Gasnikov et al., 2018; Гасников–Гасникова, 2020; Kubentayeva–Gasnikov, 2020] только в том, что $d_{ij} = d_{ij}(\lambda, \mu)$, где (λ, μ) определяются из решения задачи:

$$\min_{(\lambda,\mu)} D(t, \lambda, \mu) := \gamma \ln\left(\sum_{(i,j)\in OD} \exp\left(\frac{-T_{ij}(t) + \lambda_i + \mu_j}{\gamma}\right)\right) - \langle l, \lambda\rangle - \langle w, \mu\rangle. \tag{12}$$

Важное наблюдение, сделанное в работах [Гасников, 2015; Бабичева и др., 2015; Гасников–Нестеров и др., 2015; Гасников, 2016; Гасников–Гасникова, 2020] заключается в том, что решать задачу (9) выгоднее не как задачу оптимизации по переменным (t, λ, μ), а как задачу только по переменной t, в то время как переменные (λ, μ) лишь используются для подсчета субградиента целевого функционала по формуле (11) с $d_{ij}(\lambda, \mu)$ рассчитываемым по формуле (10), в которой

$$(\lambda, \mu) := (\lambda(t), \mu(t)) \in \operatorname*{argmin}_{(\lambda,\mu)} D(t, \lambda, \mu) \tag{13}$$

определяются как решение задачи (12). Заметим, что сложность вычисления $\nabla T_{ij}(t)$ оптимальным алгоритмом Дейкстры (детали см., например, [Гасников–Дорн и др., 2016; Gasnikov et al., 2018; Гасников–Гасникова, 2020]) будет сопоставима со сложностью вычисления (с нужной точностью) матрицы $d_{ij}(\lambda(t), \mu(t))$ [Dvurechensky et al., 2018; Peyré–Cuturi,

[1] Здесь C_λ и C_μ – произвольные числа.

2019; Guminov et al., 2019; Stonyakin et al., 2020; Tupitsa et al., 2020; Гасников, 2021]. Таким образом, получается, что сложность вычисления субградиента для двойственной задачи к (4) и для задачи (9) сопоставимы. При этом, свойства гладкости (определяющие скорость сходимости используемых методов) целевого функционала в задаче (9) при переходе от оптимизации в пространстве (t, λ, μ) к оптимизации по переменной t могут только улучшиться [Гасников–Нестеров и др., 2015; Гасников–Гасникова, 2020] (во всяком случае не ухудшиться).

Вычислительные эксперименты

Итак, в качестве задачи оптимизации предлагается решать задачу:

$$\min_{t_e \in \text{dom } \sigma_e^*, e\in E} F(t) := D(t, \lambda(t), \mu(t)) + \sum_{e\in E} \sigma_e^*(t_e). \tag{14}$$

При этом, согласно (11),

$$\nabla F(t) = \sum_{(i,j)\in OD} d_{ij}(\lambda(t), \mu(t)) \nabla T_{ij}(t) + \left(\{\tau_e^{-1}(t_e)\}_{e\in E}\right)^T,$$

где $d_{ij}(\lambda(t), \mu(t))$ определяется формулами (10), (12), (13). В качестве способа решения задачи (14) предлагается использовать универсальный ускоренный градиентный метод, адаптивно настраивающийся на гладкость задачи [Nesterov 2015; Гасников–Нестеров и др., 2015; Гасников–Гасникова и др., 2015; Gasnikov et al., 2018; Баймурзина и др., 2019; Kamzolov et al., 2020; Nesterov 2020; Гасников–Гасникова, 2020]. В худшем случае можно ожидать такой $F(t^k) - F(t_*) \simeq O(k^{-1/2})$ скорости сходимости, где t_* – решение задачи (14) (эта скорость сходимости в общем случае не улучшаема для данного класса задач, см., например, [Гасников, 2021] и цитированную там литературу), однако, как следует из результатов [Баймурзина и др., 2019] на практике можно ожидать $F(t^k) - F(t_*) \simeq O(k^{-1})$. Поскольку оптимальное значение целевого функционала $F(t_*)$ типично недоступно, то в качестве критерия оценки скорости сходимости в экспериментах планиуется использовать величину, оценивающую «зазор двойственности» $\Delta(t^k, B_k) = \max_{t\in B_k \cap \text{ dom } \sigma^*} \langle \nabla F(t^k), t^k - t\rangle$ (здесь для простоты считаем, что $\text{dom } \sigma_e^* \equiv \text{ dom } \sigma^*$). Заметим, что с одной стороны $F(t^k) - F(t_*) \le \Delta(t^k, B_k)$, если $t_* \in B_k$, а с другой стороны, оценки скорости сходимости (в том числе отмеченные выше) получены, в действительности, для зазора двойственности, поскольку универсальный ускоренный градиентный метод является прямо-двойственным методом [Nesterov 2015; Гасников–Нестеров и др., 2015; Гасников–Гасникова и др., 2015; Gasnikov et al., 2018; Баймурзина и др., 2019; Kamzolov et al., 2020; Nesterov 2020; Гасников–Гасникова, 2020; Гасников, 2021]. В численных экспериментах, базируясь на результатах о локализации последовательности, генерируемой методами типа (ускоренного) градиентного спуска [Gasnikov et al., 2018; Гасников, 2021], в качестве множества B_k выбирается евклидов шар с центром в точке t_k и радиусом равным $2\|t^0 - t^k\|_2$. Для решения вспомогательной задачи (13) можно использовать алгоритм Синхорна [Dvurechensky et al., 2018; Peyré–Cuturi, 2019], который в транспортной литературе чаще называют методом балансировки или методом Брэгмана(–Шелейховского) [Вильсон 1978; Гасников и др., 2013]. Можно использовать и ускоренные варианты этого метода [Guminov et al., 2019; Tupitsa et al., 2020]. Важной особенностью этой линейки методов (альтернативных направлений) является высокая (линейная) скорость сходимости при немалых значениях $\gamma > 0$. К сожалению, точной теории, насколько нам известно, этого режима сходимости еще нет, однако есть подтверждающие отмеченное наблюдение численные эксперименты и некоторые объяснения почему такая сходимость может быть [Kroshnin et al., 2019; Stonyakin et al., 2020]. Стоит отметить, что использованние данного подхода предполагает, что для всех $i \in O$, $j \in D$ выполянется: $l_i, w_j > 0$ и $T_{ij} < \infty$. В общем случае $OD \neq O \otimes D$ и какие-то $T_{ij} = \infty$ (что означает невозможность добраться из района i в район j), также как, возможны районы, которые являются только жилыми (рабочими) районами, что приводит к $l_i = 0$ ($w_j = 0$). Последнюю проблему можно решать чисто техническим образом, см., например, [Dvurechensky et al., 2018; Kroshnin et al., 2019], перераспределяя немного (в зависимости от желаемой точности решения задачи) с больших компонент этих векторов на нулевые, сохраняя нормировку. Проблему $T_{ij} = \infty$ также можно решать искусственно вводя пути из i в j приписывая им большие (но конечные) затраты (все это можно и содержательно проинтерпретировать). Для решения задачи (14) использовался вариант ускоренного универсального градиентного метода Нестерова [Nesterov 2015], построенный на базе ускоренного (быстрого) градиентного метода подобных треугольников [Гасников–Нестеров, 2018]. Код метода (и его адаптация к задаче (14)) был взят из [Баймурзина и др., 2019; Кубентаева, 2020; Kubentayeva–Gasnikov, 2020]. В качестве точки старта метода выбиралось значение $t^0 = \bar{t}$, см. (2). В качестве источника данных $(G, O, D, OD, l, w, \Theta, \bar{t}, \bar{f}, \gamma, \kappa, \mu)$ выбирались различные небольшие города (например, Су Фолс [Sioux Falls]) с ресурса [Stabler B. et al., 2020]. Проводилось два типа экспериментов. В первом подходе использовался метод простой (прямой) прогонки двух блоков (расчёт матрицы корреспонденций алгоритмом Синхорна, затем вычисление равновесного распределения потоков по путям универсальным ускоренным методом подобных треугольников в реализации [Баймурзина и др., 2019; Кубентаева, 2020; Kubentayeva–Gasnikov, 2020], потом пересчет матрицы затрат и снова вычисление матрицы корреспонденций и т.д.). Второй подход базировался на сочетании универсального ускоренного метода подобных треугольников в реализации [Баймурзина и др., 2019; Кубентаева, 2020; Kubentayeva–Gasnikov, 2020] с алгоримтом Синхорна, для расчёта матрицы корреспонденций так как было описано выше в этой статье. На небольшом городе Су Фолс [Sioux Falls] по модели Бэкмана с $\mu = 0.25$ не удалось добиться сходимости первого подхода. Результаты вычислительного эксперимента по второй модели приведены на рис. 1.

Из графика видно, что

$$F(t^k) - F(t_*) \leq \Delta(t^k, B_k) \simeq O(k^{-1.67}),$$

что почти соответствует скорости сходимости в гладком случае $\sim k^{-2}$ [Гасников, 2021]. Подчеркнем, что рассматриваемая задача (14) существенно негладкая, поэтому наблюдаемый результат можно интерпретировать таким образом, что негладкость задачи при правильном взгляде на нее (сквозь призму универсальных методов, настраивающихся на гладкость) не играет существенной роли в сложности ее численного решения.

Более подробно результаты экспериментов можно посмотреть по ссылке [Котлярова–Ярмошик, 2020].

Также был произведён расчёт двухстадийной модели для транспортной сети Владивостока. Дорожный граф и данные о расположении мест жительства были предоставлены Е.А. Нурминским, а данные об адресах и количествах рабочих мест по ним были собраны с ресурса [Министерство труда и социальной политики Приморского края, 2020]. Адреса для последующей обработки были преобразованы в географические координаты с помощью сервиса [ДаДата]. Для выбора источников и стоков корреспонденций и определения их характеристик (l, w) город был разбит на районы сеткой переменного размера и в каждом районе выбрано по одной вершине-источнику и вершине-стоку корреспонденций. Размеры ячеек выбирались так, чтобы в каждом районе число людей, въезжающих и выезжающих

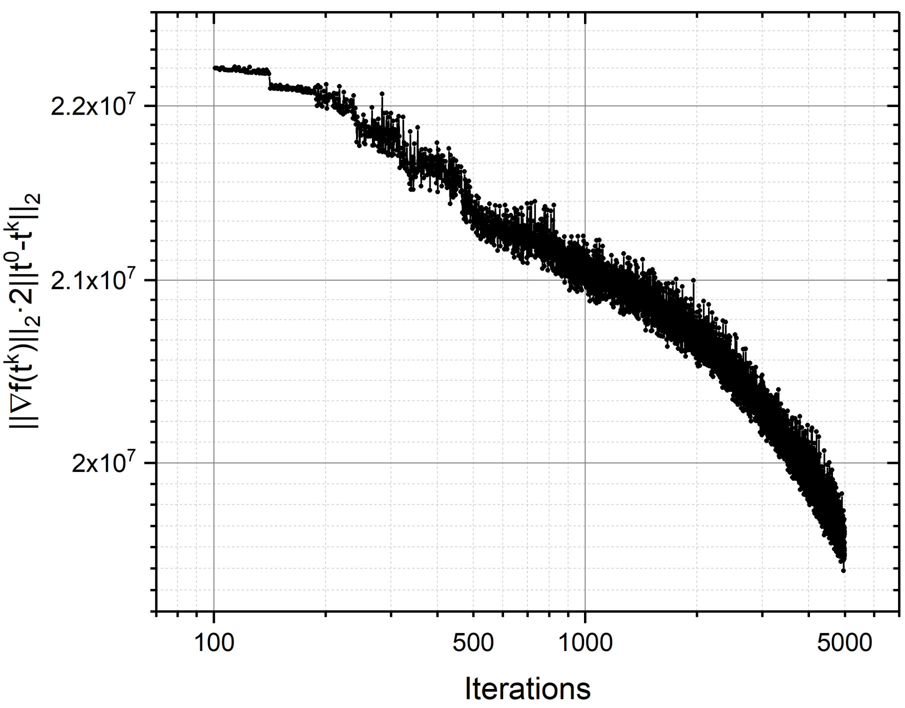

Рис. 1. По оси абсцисс итерации, по оси ординат величина, оценивающая «зазор двойственности» $\Delta(t^k, B_k) = \max_{t \in B_k \cap \text{ dom } \sigma^*} \langle \nabla F(t^k), t^k - t \rangle$

из него было достаточно небольшим. На рис. 2 изображён дорожный граф центральной части Владивостока и его разбиение на районы. Код и результаты моделирования размещены в репозитории [Котлярова–Ярмошик, 2020].

Авторы выражают благодарность проф. Ю.Е. Нестерову к 65-и летию которого приурочена данная статья, а также Мерузе Кубентаевой за постоянную помощь (консультации).

Авторы также выражают благодарность проф. Е.А. Нурминскогому за предоставленные по г. Владивостоку данные.

Работа Е.В. Котляровой была выполнена в Сириусе (Сочи) в августе 2020 г. в рамках проектной студенческой смены «Оптимизация, управление и информация».

Работа Е.В. Гасниковой была выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (госзадание) No. 075-00337-20-03, номер проекта 0714-2020-0005. Работа А.В. Гасникова была поддержана грантом РФФИ 18-29-03071 мк.

Список литературы (References)

Вильсон А. Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. // М.: Наука, — 1978. Wilson A. G. Entropy in urban and regional modeling. // Routledge, — 2011. (Russ. ed.: Wilson A. G. Entropiinye metody modelirovaniya slozhnykh sistem. // M.: Nauka, 1978).

Бабичева Т. С. и др. Двухстадийная модель равновесного распределения транспортных потоков //Труды Московского физико-технического института. – 2015. – Т. 7. – №. 3 (27) - С 31-34. Babicheva T. S. Dvuhstadijnaya model' ravnovesnogo raspredeleniya transportnyh potokov //Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta. – 2015. – Vol. 7. – №. 3 (27) - P. 31-34. (in Russian)

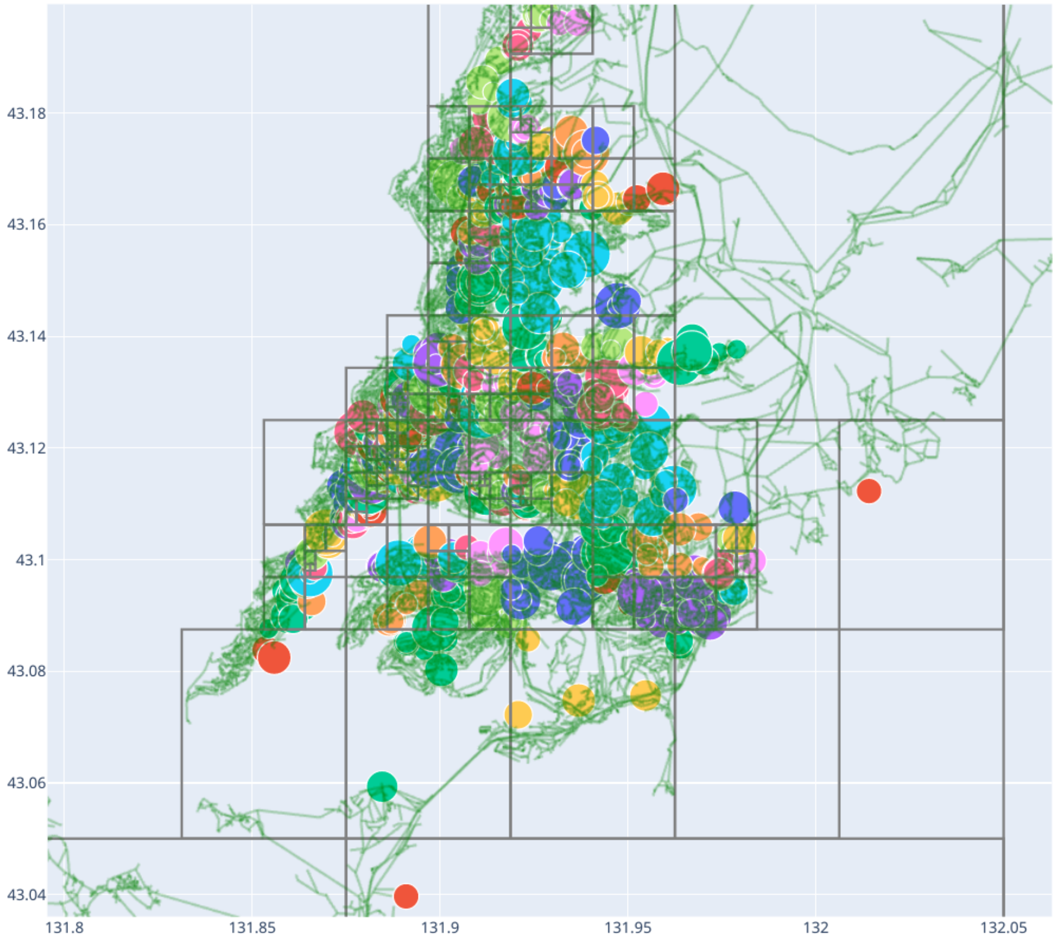

Рис. 2. Транспортная сеть Владивостока. По осям — географические координаты. Серые линии — сетка разбиения на районы. Кружки — предприятия, радиус соответствует логарифму числа рабочих мест, цвет — принадлежности району.

Баймурзина Д. Р. и др. Универсальный метод поиска равновесий и стохастических равновесий в транспортных сетях //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – Т. 59. – №. 1. – С. 21-36. Bajmurzina D. R. Universal'nyj metod poiska ravnovesij i stohasticheskih ravnovesij v transportnyh setyah //Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. – 2019. – Vol. 59. – №. 1. – P. 21-36. (in Russian)

Гасников А. В. Об эффективной вычислимости конкурентных равновесий в транспортно-экономических моделях //Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27. – №. 12. – С. 121-136. Gasnikov A. V. Ob effektivnoj vychislimosti konkurentnyh ravnovesij v transportno-ekonomicheskih modelyah //Matematicheskoe modelirovanie. – 2015. – V. 27. – №. 12. – P. 121-136. (in Russian)

Гасников А. В. Эффективные численные методы поиска равновесий в больших транспортных сетях. //Диссертация на соискание степени д.ф.-м.н. по специальности 05.13.18–Математическое моделирование, численные методы, комплексы программ. — М.: МФТИ, — 2016. — 487 с. Gasnikov A. V. Effektivnye chislennye metody poiska ravnovesii v bol'shikh transportnykh setyakh. [Efficient numerical methods for searching equillibriums in large transport networks] // M: MFTI, — 2016. — 487 p. (in Russian)

Гасников А. В. Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска. // М.: МЦНМО, — 2021. Gasnikov A. V. Sovremennye chislennye metody optimizatsii. Metod universal'nogo gradientnogo spuska. [Modern numerical optimization methods. The universal gradient descent method.] // M: MCCME, — 2021(in Russian)

Гасников А. В., Кленов С. Л., Нурминский Е. А., Холодов Я. А., Шамрай Н. Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков. Под ред. А.В. Гасникова с приложениями М.Л. Бланка, К.В. Воронцова и Ю.В. Чеховича, Е.В. Гасниковой, А.А. Замятина и В.А. Малышева, А.В. Колесникова, Ю.Е. Нестерова и С.В. Шпирко, А.М. Райгородского, с предисловием руководителя департамента транспорта г. Москвы М.С. Ликсутова. // М.: МЦНМО, – 2013. – 427 стр., 2-е изд. Gasnikov A. V. et al. Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportnykh potokov [Introduction to the mathematical modeling of traffic flows]. Eds. A.V. Gasnikov.// Moscow:MCCME, – 2013 (in Russian).

Гасников А. В. и др. О трехстадийной версии модели стационарной динамики транспортных потоков //Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26. – №. 6. – С. 34-70. Gasnikov A. V. et al. O trekhstadijnoj versii modeli stacionarnoj dinamiki transportnyh potokov //Matematicheskoe modelirovanie. – 2014. – V. 26. – №. 6. – P. 34-70. (in Russian)

Гасников А. В. и др. Поиск стохастических равновесий в транспортных моделях равновесного распределения потоков //Труды Московского физико-технического института. – 2015. – Т. 7. – №. 4 (28) - С. 143-155. Gasnikov A. V. et al. Poisk stohasticheskih ravnovesij v transportnyh modelyah ravnovesnogo raspredeleniya potokov //Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta. – 2015. – V. 7. – №. 4 (28) - P. 143-155. (in Russian)

Гасников А. В. и др. Эволюционные выводы энтропийной модели расчета матрицы корреспонденций // Математическое моделирование — 2016. — Т. 28, № 4 — С. 111-124. Gasnikov A. V. et al. Evolyucionnye vyvody entropijnoj modeli rascheta matricy korrespondencij // Matematicheskoe modelirovanie — 2016. — V. 28, № 4 — P. 111-124. (in Russian)

Гасников А. В. и др. Ускоренный метаалгоритм для задач выпуклой оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики — 2021. — Т. 61, № 1. Gasnikov A. V. et al. Uskorennyj metaalgoritm dlya zadach vypukloj optimizacii // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — 2021. — T. 61, № 1. (in Russian)

Гасников А. В., Гасникова Е. В. О возможной динамике в модели расчета матрицы корреспонденций (А. Дж. Вильсона) //Труды Московского физико-технического института. – 2010. – Т. 2. – №. 4 — С. 45-52. Gasnikov A. V., Gasnikova E. V. O vozmozhnoj dinamike v modeli rascheta matricy korrespondencij (A. Dzh. Vil'sona) //Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta. – 2010. – V. 2. – №. 4 — P. 45-52. (in Russian)

Гасников А. В. и др. О связи моделей дискретного выбора с разномасштабными по времени популяционными играми загрузок //Труды Московского физико-технического института. – 2015. – Т. 7. – №. 4 (28) — С. 129-142. Gasnikov A. V., Gasnikova E. V., et al. O svyazi modelej diskretnogo vybora s raznomasshtabnymi po vremeni populyacionnymi igrami zagruzok //Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta. – 2015. – V. 7. – №. 4 (28) — P. 129-142. (in Russian)

Гасников А. В., Гасникова Е. В. Модели равновесного распределения потоков в больших сетях. // М.: МФТИ, — 2020. — 204 с. Gasnikov A. V., Gasnikova E. V. Traffic assignment models. Numerical aspects // M: MFTI, — 2020. — 204 p. (in Russian)

Гасников А. В. и др. Численные методы поиска равновесного распределения потоков в модели Бэкмана и в модели стабильной динамики //Математическое моделирование. – 2016. – Т. 28. – №. 10. – С. 40-64. Gasnikov A. V. et al. Chislennye metody poiska ravnovesnogo raspredeleniya potokov v modeli Bekmana i v modeli stabil'noj dinamiki //Matematicheskoe modelirovanie. – 2016. – V. 28. – №. 10. – P. 40-64. (in Russian)

Гасников А. В., Кубентаева М. Б. Поиск стохастических равновесий в транспортных сетях с помощью универсального прямо-двойственного градиентного метода //Компьютерные исследования и моделирование. – 2018. – Т. 10. – №. 3. – С. 335-345. Gasnikov A. V., Kubentaeva M. B. Poisk stohasticheskih ravnovesij v transportnyh setyah s pomoshch'yu universal'nogo pryamo-dvojstvennogo gradientnogo metoda //Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie. – 2018. – V. 10. – №. 3. – P. 335-345. (in Russian)

Гасников А. В. и др. Поиск равновесий в многостадийных транспортных моделях //Труды Московского физико-технического института. – 2015. – Т. 7. – №. 4 (28) - С. 143-155. Gasnikov A. V. et al. Poisk ravnovesij v mnogostadijnyh transportnyh modelyah //Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta. – 2015. – V. 7. – №. 4 (28) - P. 143-155. (in Russian)

Гасников А. В. и др. Об эффективных численных методах решения задач энтропийно-линейного программирования //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – Т. 56. – №. 4. – С. 523-534. Gasnikov A. V. et al. Ob effektivnyh chislennyh metodah resheniya zadach entropijno-linejnogo programmirovaniya //Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. – 2016. – T. 56. – №. 4. – S. 523-534. (in Russian)

Гасников А. В., Нестеров Ю. Е. Универсальный метод для задач стохастической композитной оптимизации //ЖВМ и МФ. – 2018. – Т. 58. – №. 1. – С. 51-68. Gasnikov A. V., Nesterov Y. E Universal'nyj metod dlya zadach stohasticheskoj kompozitnoj optimizacii //ZHVM i MF. – 2018. – V. 58. – №. 1. – P. 51-68. (in Russian)

Иванова А. С. и др. Калибровка параметров модели расчета матрицы корреспонденций для г. Москвы //COMPUTER. – 2020. – Т. 12. – №. 5. – С. 961-978. Ivanova A. C., et al. Kalibrovka parametrov modeli rascheta matricy korrespondencij dlya g. Moskvy //COMPUTER. – 2020. – V. 12. – №. 5. – P. 961-978. (in Russian)

Кубентаева М. Б. `https://github.com/MeruzaKub/TransportNet`

Котлярова Е. В., Ярмошик Д. В. `https://github.com/tamamolis/TransportNet`

Bertsekas D. P. Convex optimization theory. – Belmont : Athena Scientific, 2009.

Gasnikov A. V., Gasnikova E. V., Nesterov Y. E. Dual methods for finding equilibriums in mixed models of flow distribution in large transportation networks //Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2018. – V. 58. – No. 9. – P. 1395-1403.

Guminov S. et al. Accelerated alternating minimization //arXiv preprint arXiv:1906.03622. – 2019.

Dvurechensky P. et al. Primal-dual method for searching equilibrium in hierarchical congestion population games //arXiv preprint arXiv:1606.08988. – 2016.

Dvurechensky P., Gasnikov A., Kroshnin A. Computational optimal transport: Complexity by accelerated gradient descent is better than by Sinkhorn's algorithm //arXiv preprint arXiv:1802.04367. – 2018.

Dvurechensky P. et al. A stable alternative to Sinkhorn's algorithm for regularized optimal transport //International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research. – Springer, Cham, 2020. – P. 406-423.

Kamzolov D., Dvurechensky P., Gasnikov A. Universal intermediate gradient method for convex problems with inexact oracle //Optimization Methods and Software. – 2020. – P. 1-28.

Kroshnin A. et al. On the complexity of approximating Wasserstein barycenters //International conference on machine learning. – PMLR, 2019. – P. 3530-3540.

Kubentayeva M., Gasnikov A. Finding equilibria in the traffic assignment problem with primal-dual gradient methods for Stable Dynamics model and Beckmann model //arXiv preprint arXiv:2008.02418. – 2020.

Nesterov Y. Universal gradient methods for convex optimization problems //Mathematical Programming. – 2015. – Т. 152. – №. 1-2. – С. 381-404.

Nesterov Y. et al. Primal–dual accelerated gradient methods with small-dimensional relaxation oracle //Optimization Methods and Software. – 2020. – P. 1-38.

Nesterov Y., De Palma A. Stationary dynamic solutions in congested transportation networks: summary and perspectives //Networks and spatial economics. – 2003. – Т. 3. – No. 3. – P. 371-395.

Ortúzar J. D., Willumsen L. G. Modelling transport. John Wiley and Sons //West Sussex, England. – 2002.

Patriksson M. The traffic assignment problem: models and methods. – Courier Dover Publications, 2015.

Peyré G., Cuturi M. Computational Optimal Transport: With Applications to Data Science //Foundations and Trends® in Machine Learning. – 2019. – V. 11. – №. 5-6. – P. 355-607.

Sioux Falls https://en.wikipedia.org/wiki/Sioux_Falls,_South_Dakota

Sandholm W. Population games and evolutionary dynamics. // MIT press, – 2010.

Stabler B., Bar-Gera H., Sall E. Transportation Networks for Research Core Team. Transportation Networks for Research. Accessed Month, Day, Year. https://github.com/bstabler/TransportationNetworks

Stonyakin F. S. et al. Gradient methods for problems with inexact model of the objective //International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research. – Springer, Cham, 2019. – P. 97-114.

Tupitsa N. et al. Strongly convex optimization for the dual formulation of optimal transport //International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research. – Springer, Cham, 2020. – P. 192-204.

Министерство труда и социальной политики Приморского края. Реестр работодателей https://soctrud.primorsky.ru/employer/

ДаДата. https://dadata.ru/api/geocode/