Лекция 2. Модель стабильной динамики (Нестеров–де Пальма) 1998–2000

равновесие: $\Psi(x) = \sum\limits_{e\in E} \int\limits_0^{f_e} \tau_e(z)\,dz \to \min\limits_{\substack{f=\Theta x\\ x\in X(d)}}$

соц. оптим.: $\underbrace{\sum\limits_{p\in P} x_p \cdot T_p(x)}_{} \to \min\limits_{x\in X(d)}$

W. Sandholm

соц. оптим.: $\sum\limits_{e\in E} f_e\cdot\tau_e(f_e) \to \min\limits_{\substack{f=\Theta x\\ x\in X(d)}}$

$(f_e\tau_e(f_e))' =$
$= \tau_e(f_e) + f_e\tau_e'(f_e)$

равн. $\sum\limits_{e\in E} \int\limits_0^{f_e} \tau_e(z)\,dz \to \min\limits_{\substack{f=\Theta x\\ x\in X(d)}}$

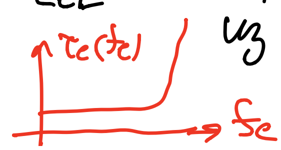
Викри–Кларка–Гроувса

$\tau_e(f_e)$ – затраты на проезд по ребру $e\in E$, если поток по ребру равен f_e.

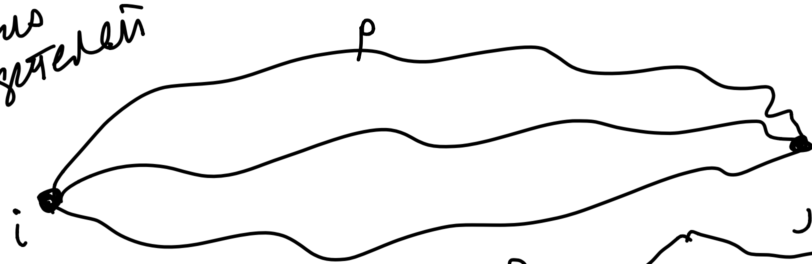
(0) $f_e = \sum\limits_{p\in P} \delta_{ep} x_p$, $\delta_{ep} = \begin{cases} 1, & e\in p \\ 0, & e\notin p \end{cases}$

f_e – поток на ребре $e\in E$; x_p – поток на пути $p\in P$, $T_p(x) = \sum\limits_{e\in E} \delta_{ep}\, \tau_e(f_e)$ (из (0))

$\tau_e(f_e) := \tau_e(f_e) + f_e\tau_e'(f_e)$

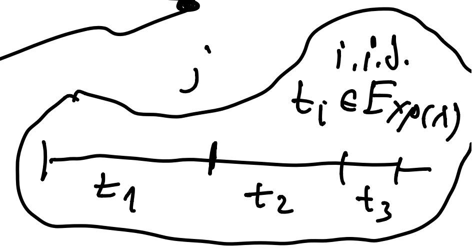


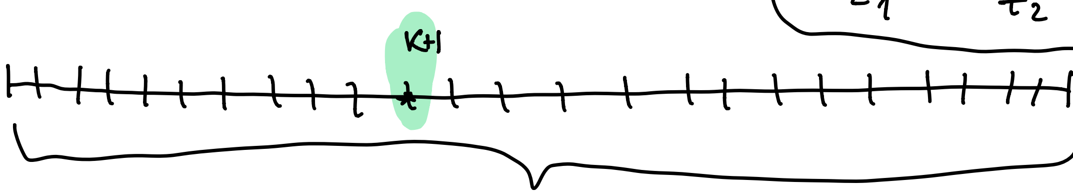
M - число водителей



$w = (i;j)$

$p \in P_w$





Водитель (из w): $T = t \cdot N$, $N \gg 1$

$\frac{\lambda}{N}$ - вообще говоря, можем поменять свою стратегию

$1 - \frac{\lambda}{N}$ - ничего не меняем

$$x^k \to T_p(x^k) = \sum_{e \in E} \delta_{ep} \tau_e(\underbrace{f_e(x^k)}_{\substack{\text{доступно} \\ f_e^k}})$$

доступно $T_p(x^k)$

не доступно T_p^k

Discrete choice theory

$$p^{k+1} = \arg\min_{q \in P_w} \{ \overbrace{T_q(x^k)}^{\text{известно}} - \xi^{k,q} \}$$

$\xi^{k,q}$ i.i.d.

$\xi^{k,q} = \max\{\eta_1^{k,q}, \eta_2^{k,q}, \dots\} \to$ распр. Гумбеля

$\eta_i^{k,q}$ i.i.d.

$$\mathbb{P}\left(\xi^{k,q} < \xi\right) = \exp\left(e^{-\xi/\gamma - E}\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(\xi^{k,q}\right) = \frac{\pi^2}{6}\gamma^2$$

$$\mathbb{E}\,\xi^{k,q} = 0 \quad // \text{ при прав. подборе } E.$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(p^{k+1} = p\right) = \frac{\exp\left(-T_p(x^k)/\gamma\right)}{\sum\limits_{q \in P_w} \exp\left(-T_q(x^k)/\gamma\right)}}$$

$t \to \infty$

$N \to \infty$, $M \gg 1$ $\qquad x \in X(d)$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} = x) \sim \exp\left(-\frac{M}{\gamma}\left(\Psi_\gamma(x) + \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \\ M \to \infty}}{o(1)}\right)\right)$$

$$\Psi_\gamma(x) = \Psi(x) + \underbrace{\gamma \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} x_p \ln(x_p / d_w)}$$

$$\downarrow \min_{x \in X(d)}$$

$$\sum_{p \in P_w} x_p = d_w$$

$N \to \infty$

$M \to \infty$, $t \to \infty$ $\qquad x = x(t)$, $p \in P_w$

$$(*) \quad \frac{dx_p}{dt} = d_w \frac{\exp\left(-T_p(x)/\gamma\right)}{\sum \exp\left(-T_q(x)/\gamma\right)} - x_p, \quad w \in W$$

$q \in P_w$

$\Psi_\gamma(x)$ — ф-ция Ляпунова этой динамики

$$\frac{d\Psi_\gamma(x)}{dt} = \langle \nabla \Psi_\gamma(x), \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{(*)} \rangle \le 0$$

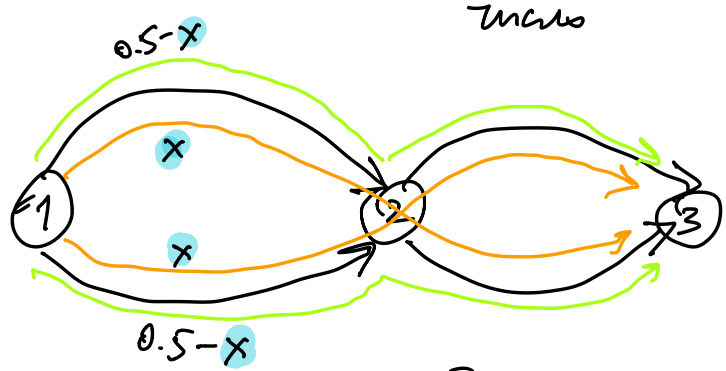
$= 0$ только при $x = x^*$

$$\Psi_\gamma(x) \to \min_{x \in X(d)}$$

x^* — реш. задачи

Пенсне Швецова

$x \in [0,1]$ число



$w = (1,3)$

$d_{13} = 1$

$\tau_e(f_e)$ одинаковы

$f_e \equiv 0.5, \; e \in E$

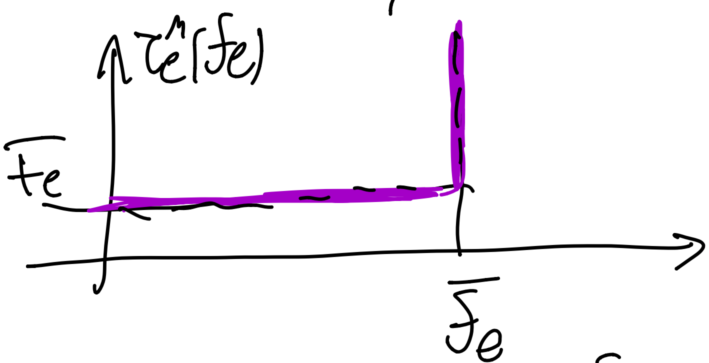
$\tau_e(f_e) \equiv$ одинаковы

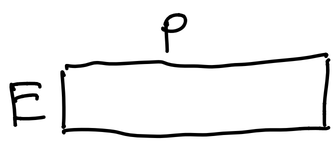
Модель стабильной динамики

$$\tau_e(f_e) = \bar{t}_e \cdot \left(1 + \varkappa \left(\frac{f_e}{\bar{f}_e}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right)$$

$\mu = 0.25$ BPR-функция

$$\mu \to 0+$$





$$\sum_{e \in E} \int_0^{f_e} \tau_e^\mu(z)\,dz \to \min$$

$f = \Theta x$

$x \in X(d)$

$\Theta = \|\delta_{ep}\|_{e \in E, p \in P}$

$$\delta_{ep} = \begin{cases} 1, & e \in p \\ 0, & e \notin p \end{cases}$$

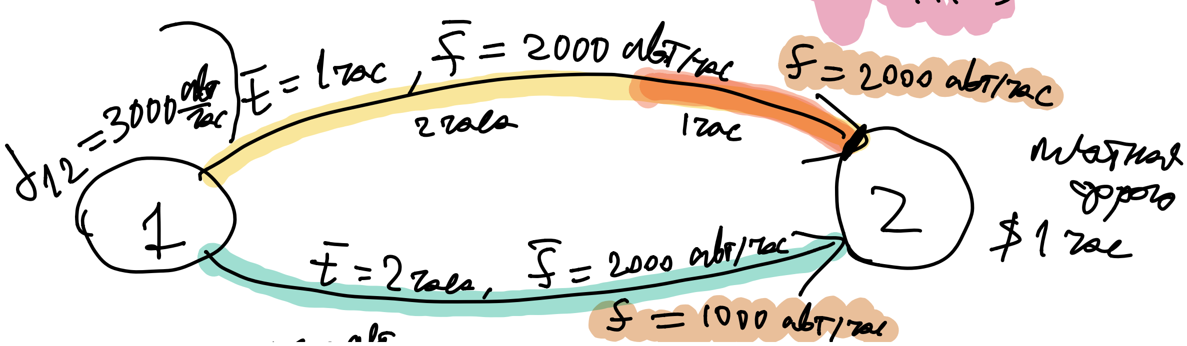
$$\mu \to 0+$$

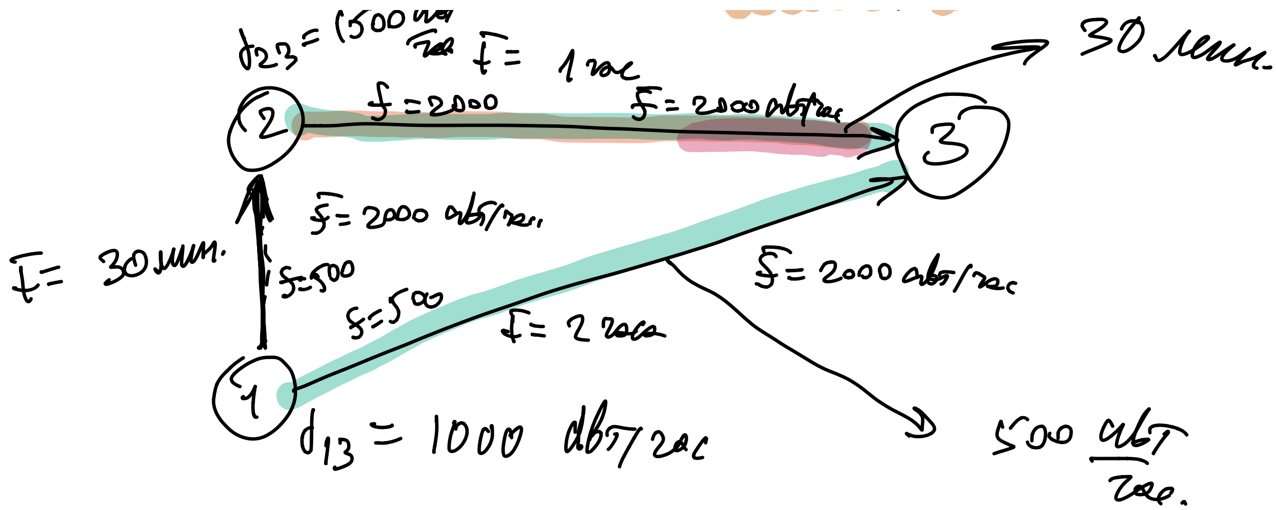
$$\sum_{e \in E} \bar{t}_e f_e \to \min$$

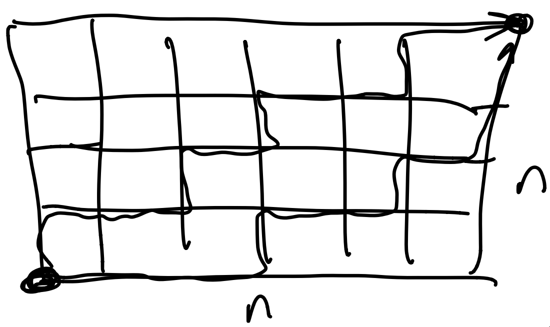
$f = \Theta x$

$f \le \bar{f}$

$x \in X(d)$







$|E| \sim 2$

$|P| \sim 2^{O(n)}$