Лекция 1.

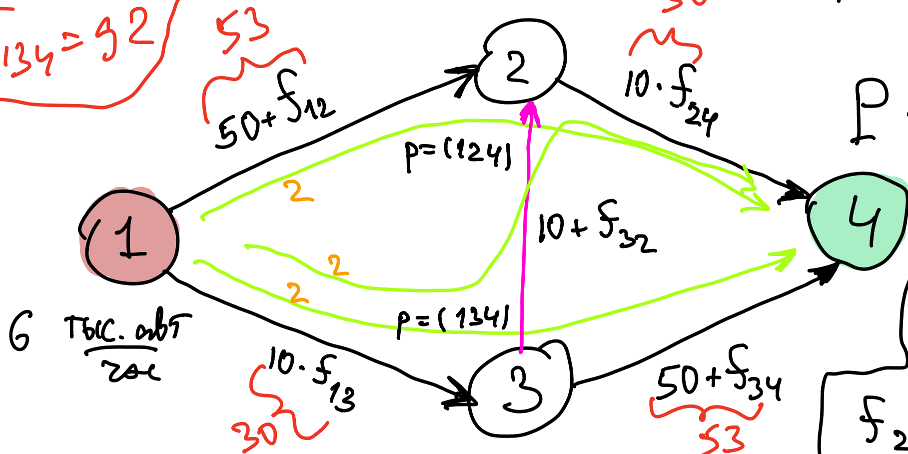
Модель Бэкмана (BMW)

Парадокс Браесса.

$T_{124} = 52+40 = 92$; $T_{1324} = 40+12+40 = 92$

$T_{134} = 92$

$E = \{(12),(24),(13),(34),(32)\}$



$P = \{(124),(134),(1324)\}$

$f = ④ x$

$$\boxed{\begin{aligned} f_{12} &= x_{124} = 2 \\ f_{34} &= x_{134} \\ f_{24} &= \underset{=2}{x_{1324}} + \underset{=2}{x_{124}} = 4 \\ f_{13} &= \underset{=2}{x_{1324}} + \underset{=2}{x_{134}} = 4 \\ f_{32} &= x_{1324} = 2 \end{aligned}}$$

$f = \{f_e\}_e$ – поток по ребру $e \in E$

$x = \{x_p\}_p$ – поток по пути $p \in P$

x_{124} – ?, x_{123} – ?

$x_{124} = f_{12} = f_{24} = 3$

$x_{134} = f_{13} = f_{34} = 3$

$\underset{3}{\underset{\parallel}{x_{124}}} + \underset{3}{\underset{\parallel}{x_{134}}} = d_{14} = 6$

$T_{124} = 83$ мин

$T_{134} = 83$ мин

$W = \{(14)\}$

$d_{14} = 6$

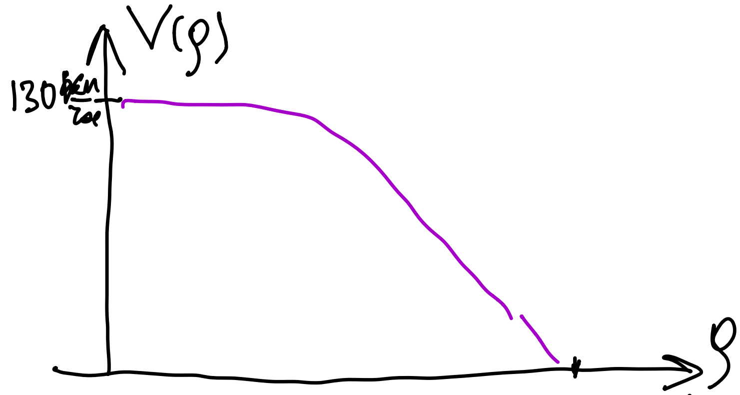
$$f = \Theta x \qquad x \in X(d)$$

потоки на ребрах — потоки на путях

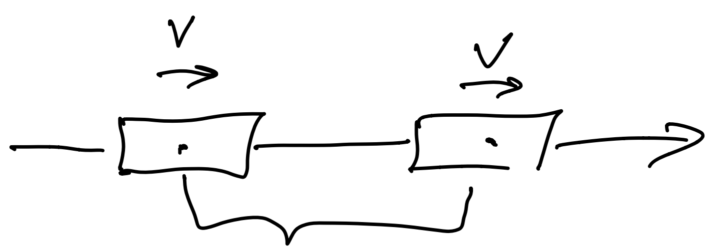
$$\underset{2}{x_{124}} + \underset{2}{x_{1324}} + \underset{2}{x_{134}} = \underset{6}{d}$$

Модель Танака

ρ – авт/км



$\rho_{max} = 160$ авт/км



$$d(v) = \frac{1}{\rho}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\rho}}_{V(\rho)} = L + \tau \cdot V + c V^2$$

τ — 0.5 сек.; cV^2 — h

$$h = \frac{v^2}{2\mu g}$$

$$\boxed{\frac{mv^2}{2} = \mu m g \cdot h}$$

$$f\left[\frac{авт}{час}\right] = V\,\frac{\cancel{км}}{час} \cdot \rho\,\frac{авт}{\cancel{км}}$$

$$f = V(\rho)\cdot\rho = V\cdot\rho(V)$$

$$f(V)$$

$$t_e = l_e / V \Rightarrow V(t)$$

$$f(V),\ V(t)$$

$$\boxed{t(f)}$$

BPR

небольш. коэфф.

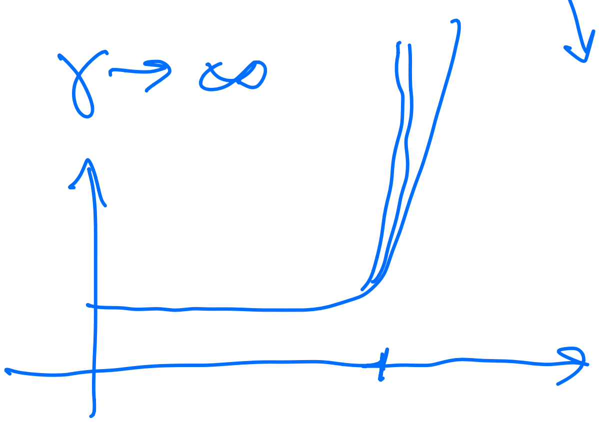
4

$$\tau_e(f_e) = \bar{t}_e \cdot \left(1 + \mu \left(\frac{f_e}{\bar{f}_e}\right)^{\gamma}\right)$$

время проезда ребра e по свободной дороге

макс. пропускн. способн. ребра [авт/час]

$\gamma \to \infty$



f_e – поток на ребре e

E – мн-во всех ребер

x_p – поток на пути p

P – мн-во всех путей

$w = (i, j)$, i – источник, j – сток; W – мн-во всех корресп.

$d_{ij} = d_w$ — величина корр. "OD"

P_w — пути, которые начинаются в i, а
"(i,j)" заканчив. в j.

$\tau_e(f_e)$ — затраты на проезд ребра e, если поток по ребру e равен f_e.

$$\Theta = \| \delta_{ep} \|_{\substack{e \in E \\ p \in P}}, \quad \delta_{ep} = \begin{cases} 1, & e \in p \\ 0, & e \notin p \end{cases}$$

(1) $$f_e = \sum_{p \in P} \delta_{ep} x_p \quad \Big\} \; f_e(x)$$

$$f = \Theta x$$

(2) $$\boxed{\sum_{p \in P_w} x_p = d_w, \; w \in W \\ x_p \geq 0, \; p \in P}$$

$x \in X(d)$ $\qquad x = \{x_p\}_{p \in P} \in X(d)$

$d \to \{d_w\}$

Как записать то, что x^* — равновесие.

(3) $$T_p(x) = \sum_{e \in E} \delta_{ep} \tau_e(f_e(x))$$

$x = \{x_p\}_p \qquad x^* \in X(d)$

$\forall w \in W, \; \forall p \in P_w$

переформул. Понятие равновесия по Нэшу.

(4) $$x_p^* \cdot \left(T_p(x^*) - \min_{q \in P_w} T_q(x^*) \right) = 0$$

$$x_p^* > 0 \Rightarrow p \in P_w \text{ — кратч. путь}$$

$$T_p(x^*) = \min_{q \in P_w} T_q(x^*)$$

Потенциальная игра

x^* — реш. задачи выпуклой оптимизации

$$\Psi(x) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e(x) = \sum_{p \in P} \delta_{ep} x_p} \tau_e(z)\, dz \quad (\text{П})$$

$$T_p(x) = \sum_{e \in E} \delta_{ep} \tau_e(f_e(x))$$

$$\boxed{\frac{\partial \Psi}{\partial x_p} = T_p(x)}$$

$$\min_{x \in X(d)} \Psi(x) \longrightarrow x^*$$

$$(3) \Rightarrow \frac{\partial T_p}{\partial x_q} = \frac{\partial T_q}{\partial x_p} \quad !$$

$$\underbrace{x^* + (0, 0, \ldots, \delta x_p, \ldots, -\delta x_p, 0, \ldots, 0)}_{\substack{p \in P_w \quad q \in P_w}} \in X(d)$$

$$\underbrace{\Psi(x^*) + \langle \nabla \Psi(x^*), x - x^* \rangle}_{\leq\ \Psi(x)} \geq \Psi(x^*)$$

$$\frac{\partial \Psi(x^*)}{\partial x_p}\,\delta x_p - \frac{\partial \Psi(x^*)}{\partial x_q}\,\delta x_p \geq 0$$

$$\delta x_p \Big(T_p(x^*) - \underbrace{T_q(x^*)}_{\min\limits_{q' \in P_w} T_{q'}(x^*)} \Big) \geq 0 \qquad (\lozenge)$$

вот, что это означает

Поскольку мы считали, что

$$x_q^* - \delta x_p \geq 0, \text{ то}$$

$$x_q^* > 0.$$

Отсюда следует (из $x_q^* > 0$ следует), что для любого $p \in P_w$ ($q \in P_w$)

$$T_p(x^*) \geq T_q(x^*), \text{ т.е.}$$

$$q \in \arg\min_{q \in P_w} T_{q'}(x^*) \qquad (\bullet)$$

Таким образом, было показано, что если x^* – решение задачи оптимизации ($\square$), то $\forall w \in W$, $\forall q \in P_w$ из $x_q^* > 0 \Rightarrow (\bullet)$, что означает (4).