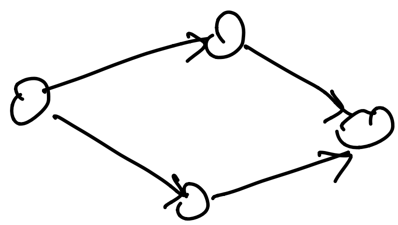
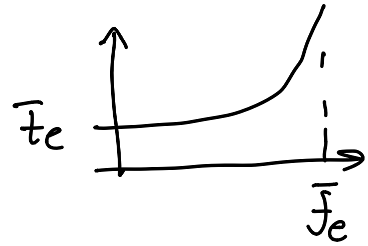
Лекция 3. Метод Франк-Вульфа

$$\Gamma = \langle V, E \rangle$$



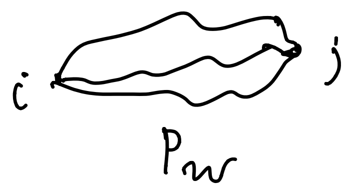
$\tau_e(f_e)$, $e \in E$



f_e – поток на ребре e

x_p – поток на пути p, $p \in P = \bigcup_{w \in OD} P_w$, $w = (i, j)$

i — источник origin, j — destination сток



$$f_e = \sum_{p \in P} \delta_{ep} x_p, \quad \delta_{ep} = \begin{cases} 1, & e \in p \\ 0, & e \notin p \end{cases}$$

$$\Theta = \| \delta_{ep} \|_{e \in E, p \in P}$$

$$X(d) = \left\{ x = \{x_p\}_{p \in P} \geq 0 : \forall w \in OD \to \sum_{p \in P_w} x_p = d_w \right\}$$

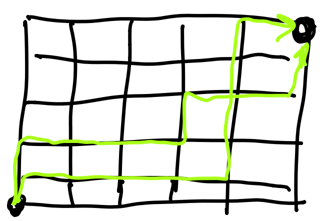
$d = \{d_w\}_{w \in OD}$

BMW:
1954
равновесие

$$\sum_{e \in E} \int_0^{f_e} \tau_e(z)\, dz \to \min_{\substack{f = \Theta x \\ x \in X(d)}}$$

$$\sigma_e(f_e) = \int_0^{f_e} \tau_e(z)\,dz \qquad |E| \sim 3|V|$$

$$\sum_{e\in E} \sigma_e\Big(\sum_{p\in P} \delta_{ep} x_p\Big) \to \min_{x\in X(d)}$$



$$|P| = \dim x$$

$$\gtrsim 2^{O(\sqrt{|E|})}$$

Метод условного градиента (Франк-Вульф)

$$f(x) \to \min_{x\in X}$$

$$\gamma_k = \frac{2}{k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{cases} (П) & y^k = \operatorname*{argmin}_{y\in X} \langle \nabla f(x^k), y\rangle \\ (O) & x^{k+1} = (1-\gamma_k)x^k + \gamma_k y^k \end{cases}$$

$p=2$

$\lambda_{max}(\nabla^2 f(x)) \le$

$\le L$

$p=2$

не обяз.

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_q \le L_p \|y-x\|_p, \quad p \ge 1$$

$$\Downarrow$$

$$f(y) \le f(x) + \langle \nabla f(x), y-x\rangle + \frac{L_p}{2}\|y-x\|_p^2$$

$p=2$

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle y-x, \underbrace{\nabla^2 f(\bar{x})}_{\preceq LI}(y-x)\rangle$$

$\bar{x}\in[x,y]$ $(*)$ $f(y) \le f(x) + \langle \nabla f(x), y-x\rangle + \frac{L}{2}\|y-x\|^2$

Теорема. $f(x^k) - f(x_*) \le \dfrac{2L_p R_p^2}{k+2}$

$R_p = \sup\limits_{x,y \in X} \|y - x\|_p$.

Д-во. Возьмём в $(*)$ $y = x^{k+1}$, $x = x^k$

$f(x^{k+1}) - f(x^k) \le \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 =$

$\underset{(0)}{=} \gamma_k \langle \nabla f(x^k), y^k - x^k \rangle + \frac{L \gamma_k^2}{2} \underbrace{\|y^k - x^k\|^2}_{R^2} \le$

$\Downarrow$

$x^{k+1} - x^k = \gamma_k (y^k - x^k)$

$x^{k+1} = (1-\gamma^k) x^k + \gamma^k y^k$

$\underset{(\square)}{\le} \gamma_k \langle \nabla f(x^k), x_* - x^k \rangle + \frac{L\gamma_k^2}{2} R^2 \le$

$\langle \nabla f(x^k), y^k \rangle \le \langle \nabla f(x^k), y \rangle \quad \forall y \in X$

в частности $y = x_* \in X$

$f(x)$ – выпуклая ф-ция на X

$\forall x, y \in X \rightarrow f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \le f(y)$

$\langle \nabla f(x^k), x_* - x^k \rangle \le f(x_*) - f(x^k)$

$$\underset{x}{f(x^k)} + \langle \nabla f(\underset{x}{x^k}), \underset{y}{x_*} - \underset{x}{x^k} \rangle \le f(\underset{y}{x_*})$$

$$\underset{\text{по выпукл. } f.}{\leq} \quad \gamma_k\left(f(x_*) - f(x^k)\right) + \gamma_k^2 \frac{LR^2}{2} \qquad (\Delta)$$

$$\Big| \; \delta_k \overset{def}{=} \frac{f(x^k) - f(x_*)}{LR^2}$$

Из (Δ)

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) \leq \gamma_k\left(f(x^k) - f(x_*)\right) + \gamma_k^2 \frac{LR^2}{2}$$

$$f(x^{k+1}) - f(x_*) \leq (1-\gamma_k)\left(f(x^k) - f(x_*)\right) + \gamma_k^2 \frac{LR^2}{2}$$

$$\delta_{k+1} \leq (1-\gamma_k)\delta_k + \frac{\gamma_k^2}{2}$$

$$\gamma_k = \frac{2}{k+1}, \quad \gamma_1 = 1, \quad \delta_2 \leq \frac{1}{2}$$

По индукции $\quad \delta_k \leq \dfrac{2}{k+2}$

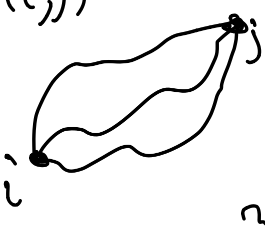
$$\underbrace{\sum_{e \in E} \int_0^{\sum_{p \in P} \delta_{ep} x_p} \tau_e(z)\, dz}_{f(x)\ (\Psi(x))} \to \min_{x \in X(d)}$$

$X(d) \overset{\text{обозн.}}{=} X$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_p} = T_p(x) = \sum_{e \in E} \delta_{ep} \overbrace{\tau_e\Big(\sum_{p \in P} \delta_{ep} x_p\Big)}^{\text{наб. модель}}$$

$$(\square) \quad y^k = \arg\min_{y \in X} \sum_{p \in P} \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{T_p(x^k)}\, y_p, \quad \overset{y \in X}{\forall w \in OD \to \sum_{p \in P_w} y_p = d_w}, \; y_p \geq 0$$

$w=(i;j)$



$$\sum_{w\in OD} \left| \begin{array}{l} \sum_{p\in P_w} y_p = d_w \\ \sum_{p\in P_w} y_p T_p(x^k) \to \min \end{array} \right.$$

Взвешиваю граф $\tau_e(f^k)$

$$f^k = \sum_{p\in P} \delta_{ep} x_p^k$$

использовать только кратчайшие маршруты!!!

Нахожу кратчайшие маршруты.

p_w^k $\qquad y_{p_w^k} = d_w$, остальные 0. комп. y

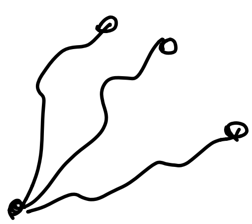
крат. марш. $\left\{ \begin{array}{l} p^k_{w,1} \\ \vdots \\ p^k_{w,m} \end{array} \right.$ $\qquad \sum_i y_{p^k_{w,i}} = d_w$, остальные комп. y 0

Искать кратчайшие маршруты можно за

$$\underbrace{O(|E|\log|E|)}_{\text{можно паралл. по числу источников}}, \quad |E|\sim|V|$$

$|O|$ — число источн. корр.

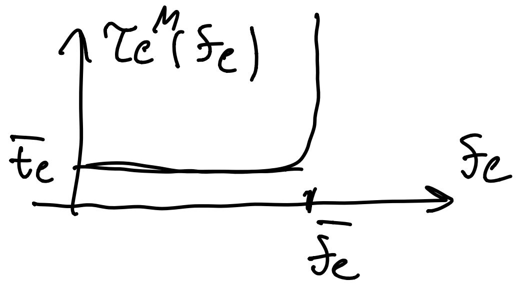
Стоим. поиска крат. маршрута из одного источника во все стоки



Дейкстра

$$O(\underbrace{|O|}_{\text{паралл.}}\cdot|E|\log|E|)$$

Модель стабильной динамики



$$\tau_e^\mu(f_e) = \bar t_e \left(1 + \varkappa \cdot \left(\frac{f_e}{\bar f_e}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right)$$

BPR-функция $\mu = 0.25$.

$\mu \to 0+$ в стаб-дин.

$$\left\{ \sum_{e\in E} \underbrace{\int_0^{f_e} \tau_e(z)\,dz}_{\sigma_e(f_e)} \to \min_{\substack{f = \Theta x \\ x\in X(d)}} \right.$$

$$\sum_{e\in E} f_e \bar t_e \to \min_{\substack{f = \Theta x \\ f \le \bar f \\ x\in X(d)}}$$

ЛП

$\Downarrow$

постр. двойств. и решать её

$$\boxed{\min_{\substack{f = \Theta x \\ x\in X(d)}} \sum_{e\in E} \sigma_e(f_e)} =$$

т. Фенхеля.

$$\sigma_e(f_e) = \max_{t_e \in \operatorname{dom}\sigma_e^*} \{ t_e f_e - \sigma_e^*(t_e) \}$$

$$= \min_{\substack{f = \Theta x \\ x\in X(d)}} \sum_{e\in E} \max_{t_e \in \operatorname{dom}\sigma_e^*} \{ t_e f_e - \sigma_e^*(t_e) \}$$

(для BPR

$$\sigma_e^*(t_e) = \bar f_e \left(\frac{t_e - \bar t_e}{\bar t_e \varkappa}\right)^{\mu} \cdot \frac{t_e - \bar t_e}{1+\mu}$$

$$\underbrace{t_e \ge \bar t_e}_{\operatorname{dom}\sigma_e^*}$$

$\Downarrow$ $\mu \to 0+$

$$\bar f_e \cdot (t_e - \bar t_e)$$

$\ominus$ min max

Сиона-Какутани

$$= \max_{t} \Big\{ \underbrace{\Big[\min_{\substack{f=\Theta x \\ x\in X(d)}} \sum_{e\in E} t_e f_e \Big\}}_{f_e = \sum_{p\in P} \delta_{ep} x_p} - \sum_{e\in E} \sigma_e^*(t_e) \Big\}$$

$$\min_{x\in X(d)} \sum_{e\in E} \sum_{p\in P} \delta_{ep} x_p t_e = \min_{x\in X(d)} \sum_{p\in P} x_p \underbrace{\sum_{e\in E} \delta_{ep} t_e}_{T_p(t)}$$

$$T_p(t) \swarrow \{t_e\}_{e\in E}$$

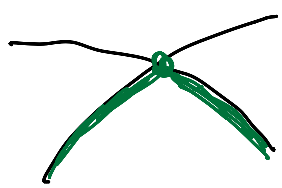
$$\min_{x\in X(d)} \sum_{p\in P} x_p T_p(t) \quad \Rightarrow \quad \Bigg| \quad \min_{\sum_{p\in P_w} x_p = d_w} \sum_{p\in P_w} x_p T_p(t)$$

$$X(d) \;\|\; \sum_{p\in P_w} x_p = d_w, \; w\in OD$$

$$\sum_{w\in OD}$$

$$\Downarrow$$

$$d_w \underbrace{\min_{p\in P_w} T_p(t)}_{} \to T^w(t)$$



$$= \max_{\substack{t=\{t_e\}_{e\in E} \\ \uparrow \\ \operatorname{dom} \sigma_e^*}} \Big\{ \underbrace{\sum_{w\in OD} d_w T^w(t) - \sum_{e\in E} \bar f_e \left(\frac{t_e - \bar t_e}{\bar t_e \varkappa}\right)^{\mu} \frac{(t_e - \bar t_e)}{1+\mu}}_{\Upsilon(t)} \Big\}$$

$$\underset{\mu\to 0+}{=} \max_{t\ge \bar t} \Big\{ \underbrace{\sum_{w\in OD} d_w T^w(t)}_{} - \langle \bar f, t - \bar t \rangle \Big\}$$

считается за $O(|OD|\,|E| \ln |E|)$

$$\partial T^w(t) = e \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \text{если ребро } e \text{ входит в кратч. путь, отвеч.}$$

парал.

корр. 'w' на графе, взвеш. $t=\{t_e\}$

$$(\star)\ \Upsilon(t) = \min_{\substack{f=\Theta x\\ f\in\mathcal{F}\\ x\in X(d)}} \sum_{e\in E} f_e t_e$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= f,x\\ x &= t\end{aligned}}$$

т. Демьянова-Данскина

$$f(x) = \min_y F(x,y) = F(x, y(x))$$

$$\nabla f(x) = \left.\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right|_{y=y(x)}$$

$$y(x):\quad F(x,y)\to\min_y \Rightarrow \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\underset{x}{\equiv} 0 \Rightarrow y(x)$$

$$\nabla f(x) = \nabla F(x,y(x)) =$$

$$= \frac{\partial F(x,y(x))}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}\cancel{\frac{\partial F(x,y(x))}{\partial y}} = \frac{\partial F(x,y(x))}{\partial x}$$

Из $(\star)$ по т. Демьянова-Данскина $\Rightarrow f = \dfrac{\partial\Upsilon}{\partial \bar t}$

С другой стороны

$$\frac{\partial}{\partial \bar t}\Upsilon(t) = \frac{\partial}{\partial \bar t}\max_{t\geq \bar t}\left\{\sum_{w\in OD} d_w T^w(t) - \langle \bar f, t-\bar t\rangle\right\} =$$

множ. лагранжа к $t\geq\bar t$

$$= \frac{\partial}{\partial \bar t}\max_t\left\{\sum_{w\in OD} d_w T^w(t) - \langle \underbrace{\bar f - s}_{f}, t-\bar t\rangle\right\} = \bar f - s\ ,\ \text{но}$$

$f = \bar{f} - s$ можно найти из условия

$$\partial\left(\sum_{w\in OD} d_w T^w(t) - \langle f, t-\bar{t}\rangle\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f \in \partial \sum_{w\in OD} d_w T^w(t)} \quad !$$